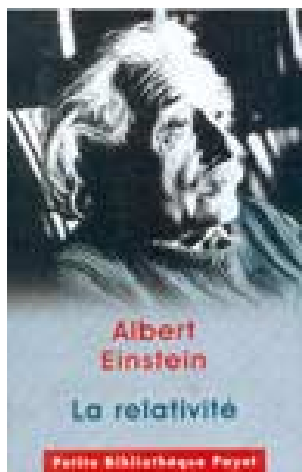


Avertissement

Le document suivant apparaît en appendice du livre "La relativité" d'Albert Einstein édité chez "Petite bibliothèque Payot".

L'extrait n'a été fait que dans le but de respecter l'intégrité du texte d'origine sans intention de piratage intellectuel quelconque de ma part.

J'invite donc les lecteurs qui désirent approfondir le sujet à se procurer l'ouvrage dont ils trouveront ci-dessous la référence :



Titre : La relativité
Auteur : Albert EINSTEIN
Petite Bibliothèque Payot
Code Seuil : 27010
ISBN : 2-228-88254-2

I

Dérivation simple de la transformation de Lorentz (Complément du Chapitre 11)

Dans l'orientation relative des systèmes de coordonnées indiquée par la figure 2 (p. 49), les axes des x des deux systèmes coïncident d'une manière permanente. Nous pouvons ici diviser le problème en ne considérant tout d'abord que des événements localisés sur l'axe des x . Un tel événement est représenté, relativement au système de coordonnées K , par l'abscisse x et le temps t , et, relativement au système de coordonnées K' , par l'abscisse x' et le temps t' . Il s'agit de trouver x' et t' quand x et t sont donnés.

Un signal lumineux qui avance le long de l'axe positif des x se propage d'après l'équation

$$x = ct,$$

ou

$$(1) \quad x - ct = 0.$$

Puisque le même signal lumineux se propage aussi relativement à K' avec la vitesse c , la pro-

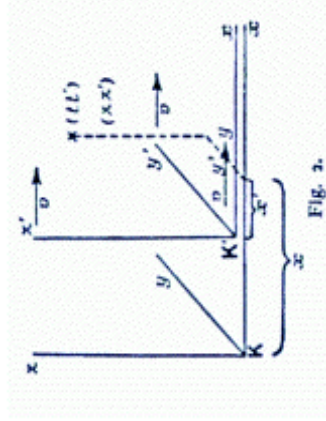


Fig. 2.

pagation relativement à K' sera représentée par la formule analogue

$$(2) \quad x' - ct' = 0.$$

Les points spatio-temporels (événements) qui satisfont à l'équation (1) doivent aussi satisfaire à l'équation (2). Ceci sera manifestement le cas si la relation

$$(3) \quad (x' - ct') = \lambda (x - ct)$$

est généralement satisfaite, où λ désigne une constante; car, d'après (3), la disparition de $(x - ct)$ entraîne la disparition de $(x' - ct')$.

Une considération tout à fait analogue appliquée à des rayons lumineux se propageant le long de l'axe des x négatifs fournit la condition

$$(4) \quad x' + ct' = \mu (x + ct).$$

Par l'addition ou la soustraction des équations (3) et (4), où pour des raisons de commodité on introduit, au lieu des constantes λ et μ , les constantes

$$a = \frac{\lambda + \mu}{2},$$

$$b = \frac{\lambda - \mu}{2},$$

on obtient

$$(5) \quad \begin{cases} x' = ax - bct, \\ ct' = act - bx. \end{cases}$$

Notre problème serait ainsi résolu, si les constantes a et b étaient connues ; elles résultent des considérations suivantes.

Pour l'origine de K' on a d'une manière permanente $x' = 0$ et par conséquent, d'après la première des équations (5),

$$x = \frac{bc}{a} t.$$

En désignant par v la vitesse avec laquelle l'origine de K' se meut relativement à K , on a

$$(6) \quad v = \frac{bc}{a}.$$

On obtient la même valeur v de l'équation (5) quand on calcule la vitesse, par rapport à K , d'un autre point de K' ou bien la vitesse (dirigée suivant l'axe négatif des x) d'un point de K par rapport à K' . Bref, on peut considérer v comme représentant la vitesse relative des deux systèmes.

Il est en outre clair, d'après le principe de relativité, que la longueur, dans le système K , d'une règle de mesure unité, qui est au repos relativement à K' , doit être exactement la même que celle, dans le système K' , d'une règle de mesure unité qui est au repos relativement à K . Pour

voir comment se présentent, dans le système K , les points de l'axe des x' , nous n'avons qu'à prendre un « instantané » de K' et de K ; cela signifie que nous devons introduire pour t (temps de K) une valeur déterminée, par exemple $t = 0$. De la première des équations (5) on obtient pour cette valeur

$$x' = ax.$$

Deux points de l'axe des x' , qui sont séparés par la distance $x' = 1$, mesurée en K , sont séparés sur notre instantané par la distance

$$(7) \quad \Delta x' = \frac{1}{a}.$$

Mais si l'on prend l'instantané dans K' ($t' = 0$), on obtient de (5), en éliminant t et en tenant compte de (6),

$$x' = a \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) x.$$

On en conclut que deux points de l'axe des x , séparés (relativement à K) par la distance 1, ont sur notre instantané la distance

$$\Delta x' = a \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right).$$

Comme, d'après ce qui vient d'être dit, les deux instantanés doivent être identiques, Δx dans (7) doit être égal $\Delta x'$ dans (7 a), de sorte qu'on a

$$(7 b) \quad a^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Les équations (6) et (7 b) déterminent les constantes a et b . En portant les valeurs de ces constantes dans (5), on obtient la première et la quatrième des équations indiquées au chapitre 11.

$$(8) \quad \begin{cases} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Nous avons ainsi obtenu la transformation de Lorentz pour des événements sur l'axe des x . Elle satisfait à la condition

$$(8 a) \quad x'^2 - c^2 t'^2 = x^2 - c^2 t^2.$$

L'extension de ce résultat à des événements qui ont lieu en dehors de l'axe des x est obtenue en conservant les équations (8) et en ajoutant les relations

$$(9) \quad \begin{cases} y' = y \\ z' = z. \end{cases}$$

Que le postulat de la constance de la vitesse de la lumière dans le vide, pour des rayons lumineux de direction quelconque, satisfait aussi bien au système K qu'au système K', on peut s'en convaincre de la façon suivante.

Supposons qu'on envoie de l'origine de K un rayon lumineux au temps $t = 0$. Sa propagation a lieu conformément à l'équation

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = ct,$$

ou, en élevant cette équation au carré, conformément à l'équation

$$(10) \quad x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0.$$

La loi de la propagation de la lumière en union avec le postulat de la relativité exige que la propagation du même signal — envisagée de K' — ait lieu suivant la formule correspondante

$$r' - ct'$$

ou

$$(10 a) \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0.$$

Pour que l'équation (10 a) soit une conséquence de l'équation (10), il faut qu'on ait

$$(11) \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = \sigma(x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2).$$

Comme l'équation (8 a) doit être valable pour les points sur l'axe des x , σ doit être égal à 1. On reconnaît facilement que la transformation de Lorentz satisfait réellement à l'équation (11) pour $\sigma = 1$; en effet, (11) est une conséquence de (8 a) et (9), par conséquent aussi de (8) et (9). C'est ainsi qu'est dérivée la transformation de Lorentz.

Cette transformation représentée par (8) et (9) doit encore être généralisée. Il importe manifestement peu que les axes de K' soient choisis parallèles à ceux de K. Il importe également peu que la vitesse de translation de K' par rapport à K soit dirigée suivant l'axe des x . On peut composer la transformation de Lorentz dans ce sens général — comme le montre une considération simple — de deux sortes de transformations, c'est-à-dire de transformations dans le sens particulier et de transformations purement spatiales, ce qui correspond au remplacement du système de coordonnées rectangulaire par un nouveau système dont les axes sont autrement orientés. Au point de vue mathématique la transformation généralisée de Lorentz peut être caractérisée de la manière suivante :

Elle exprime x', y', z', t' par les fonctions linéaires homogènes de x, y, z, t d'un genre tel que la relation

$$(11 a) \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

est identiquement satisfaite. Ceci signifie : Si l'on remplace dans le premier membre x', y', z', t' par leurs expressions en x, y, z, t , alors le premier membre de (11 a) devient identique au second.